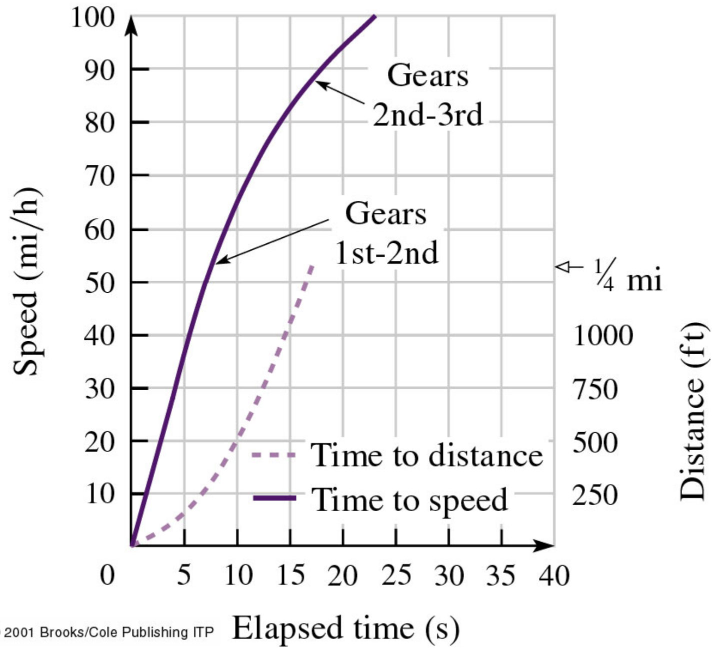
Accélération instantanée

L'accélération décrit le changement de la vitesse par unité de temps. La limite pour des intervalles de temps infinitésimaux définit l'accélération instantanée, le taux de changement instantané de la vitesse:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{s}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2}$$



Dans un diagramme donnant la vitesse en fonction du temps, l'accélération est la pente de la tangente à la courbe:

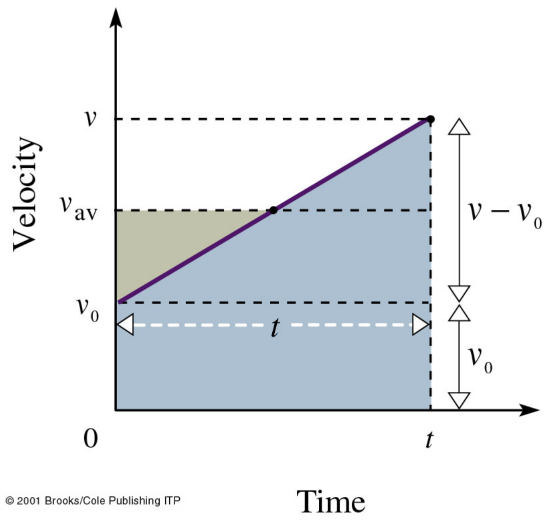
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Dans un diagramme donnant le parcours en fonction du temps, l'accélération est la courbure de la courbe, ou la dérivée seconde:

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2}$$

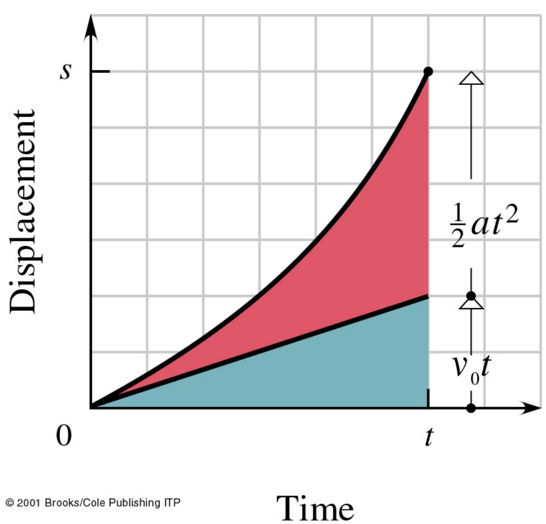
Son unité en SI est le m/s^2.

Sommaire: le mouvement rectiligne uniformement accéléré



Si à $t = 0$ le mobile est en x_0 avec une vitesse initiale v_0, et l'instant t en x avec une vitesse v, on a:

$$v - v_0 = at$$
$$v_m = \frac{1}{2}(v + v_0)$$

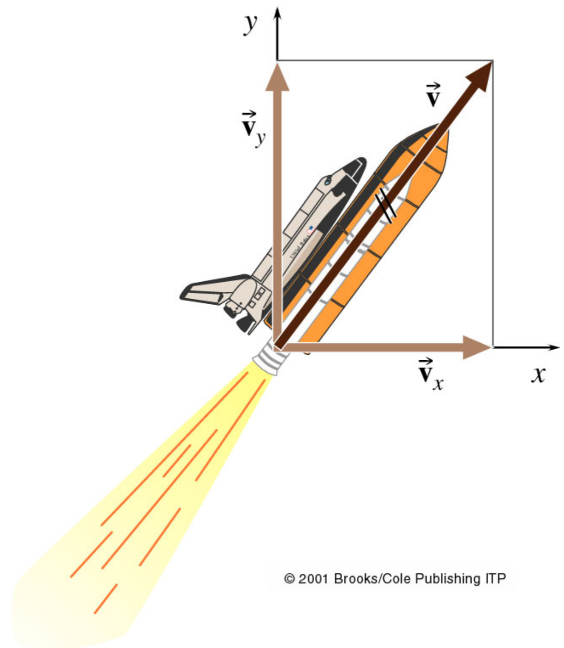


avec les relations suivantes:

$$x - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2$$
$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$
$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0)\,t$$

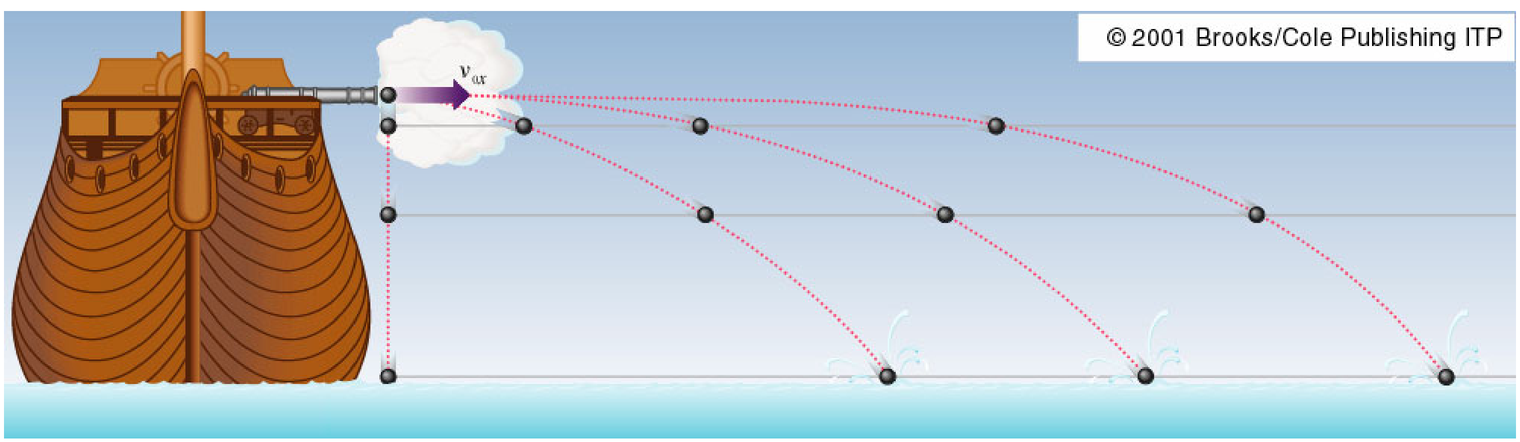
Mouvement des projectiles balistiques

Regardons le cas général où la vitesse initiale n'est pas verticale. Décomposons la vitesse initiale en ses composantes verticale et horizontale.
L'accélération $\vec{g}$ change le module de la composante verticale uniquement, la composante horizontale reste constante. Le mouvement se présente comme un mouvement horizontal rectiligne et uniforme, et une chute verticale uniformément accélérée sous l'effet de la gravité.

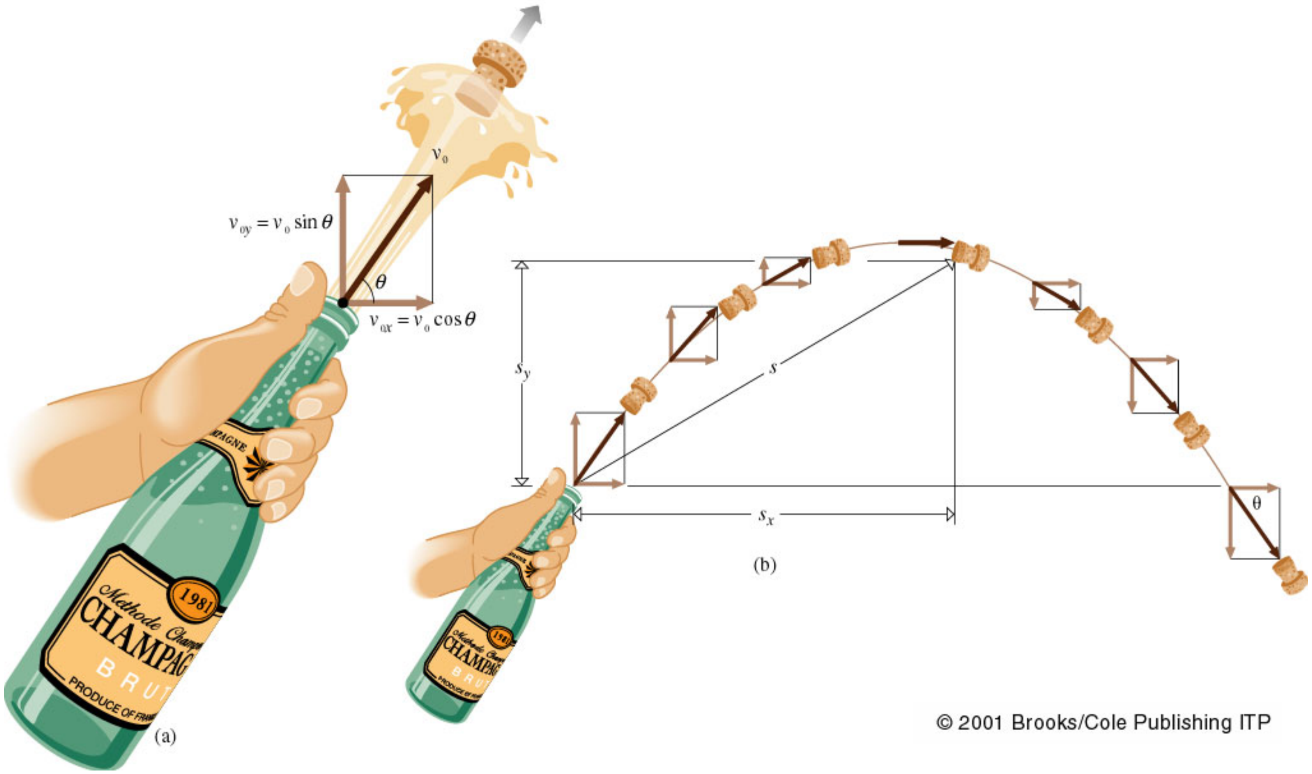


Pour un tir horizontal, i.e. $\vec{v}_0 \perp \vec{a}$, la situation est simple: $x = x_0 + v_0 t$; $y = y_0 + \frac{1}{2} g t^2$

Démo 10, DvD 02-01



Mouvement des projectiles balistiques



Pour un traitement quantitatif du vol balistique (i.e. non propulsé) prenons un exemple plus pacifique. Les composantes horizontale et verticale de la vitesse initiale sont:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

Fixant l'origine du déplacement au goulot de la bouteille, les composantes horizontale et verticale du déplacement sont par conséquent:

$$s_x = v_{0x} t \quad ; \quad s_y = v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2$$

Ceci définit complètement la trajectoire du bouchon. Démo 11, DvD 02-02

Mouvement des projectiles balistiques

En ce qui concerne la composante verticale du trajet, nos résultats précédents restent complètement valables, en substituant v_{0y} à v_0.

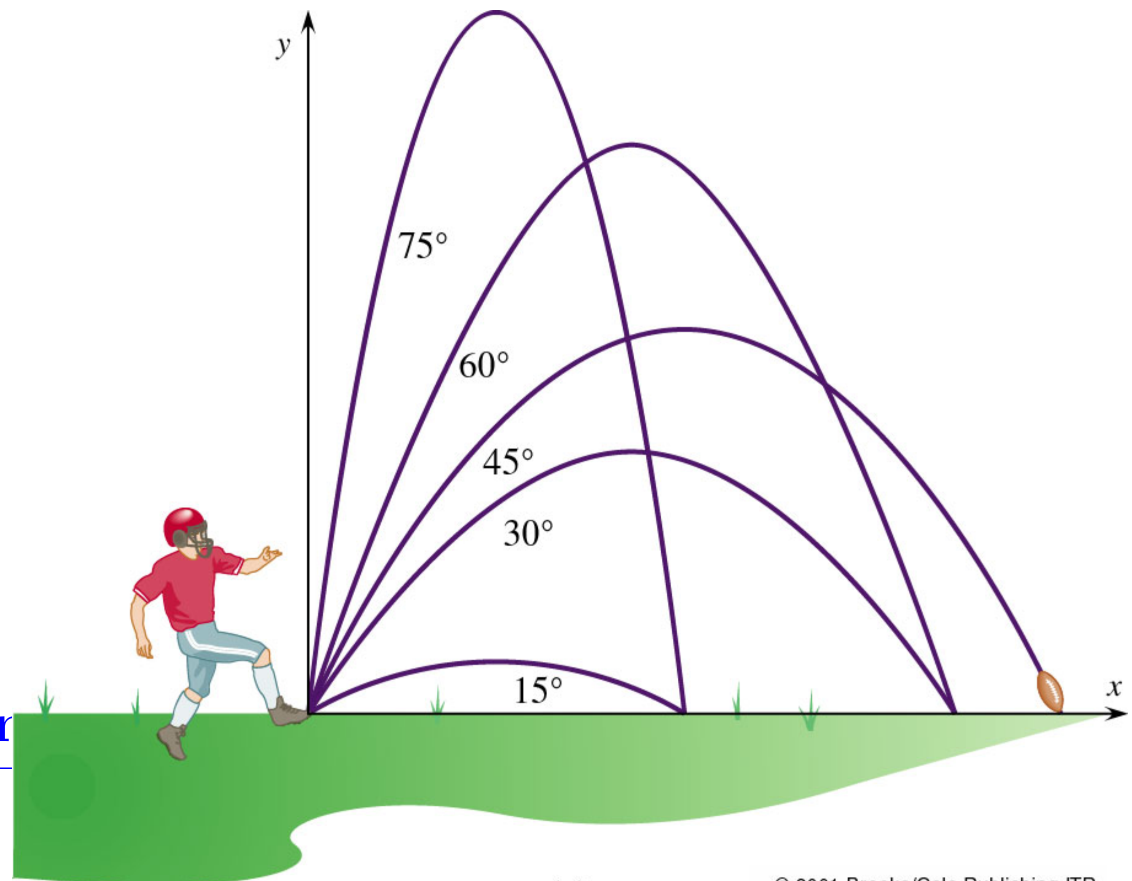
L'altitude du sommet d'un tir à partir du sol est:

$$s_p = -\frac{v_{0y}^2}{2g} = -\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

La hauteur du tir est maximale pour $\theta = 90°$.

Le temps total du trajet, sol-à-sol, est:

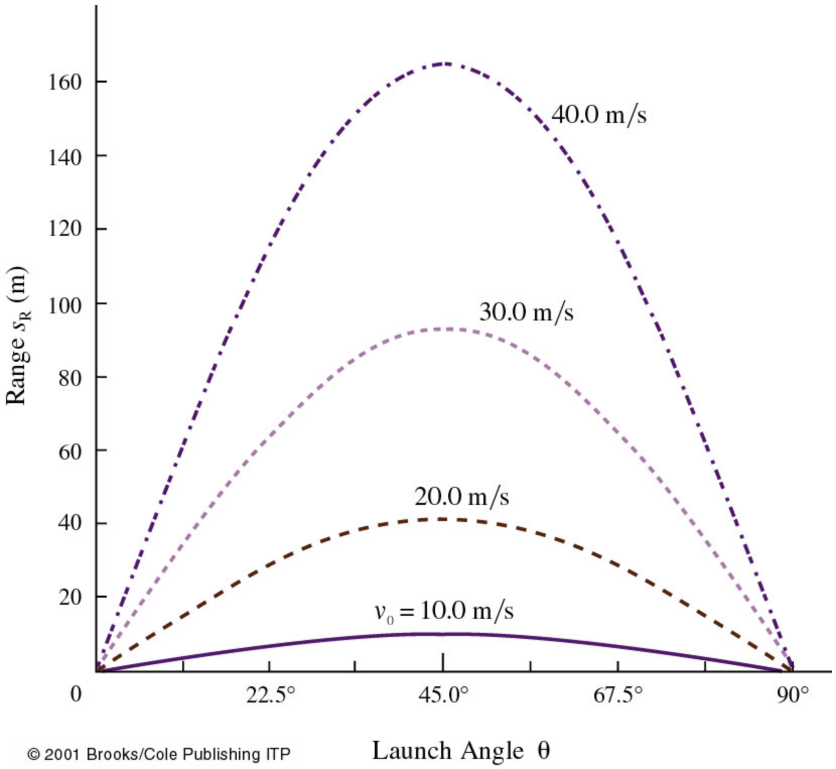
$$t_T = 2t_p = -\frac{2v_{0y}}{g} = -\frac{2v_0 \sin}{g}$$



(a)

Attention: avec notre choix des coordonnées, g est toujours négatif.

Mouvement des projectiles balistiques



La portée du tir est la distance horizontale totale parcourue lorsque le projectile repasse à la même hauteur que son point de lancement. Evidemment il faut que θ soit positif. Le mouvement horizontal est uniforme:

$$s_r = v_{0x} t_T = (v_0 \cos\theta) t_T = -\frac{2v_0^2}{g} \cos\theta \sin\theta$$

Le maximum de $\cos\theta \sin\theta$ est atteint pour $\theta = 45°$. A cet angle la portée du tir est maximale. DvD 02-06

Attention: Tout ceci néglige la résistance de l'air. Quand on en tient compte, l'angle "idéal" du tir est plutôt de l'ordre de 35°.